Om Integrationen af Differentialligninger, der føre til Additionstheoremer for transcendente Funktioner,

af

Adolph Steen.

Avec un Résumé français.

Vidensk. Selsk. Skr., 5 Række, naturvidensk. og mathem. Afd., 8 Bd. I.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

Om Integrationen af Differentialligninger, der føre til Additionstheoremer for transcendente Funktioner,

af

Adolph Steen.

Vidensk. Selsk. Skr., 5 Række, naturvidensk. og mathem. Afd., 8 Bd. I.

Kjøbenhavn.

Bianco Lunos Bogtrykkeri ved F. S. Muhle.

1868.

Integrationen af den Art Differentialligninger, der har ført til Addition af de elliptiske Integraler, er oprindelig udført efter usikkre empiriske Methoder. Dette erklæres i utvivlsomme Udtryk paa flere Steder i *Eulers* Afhandlinger (se Novi comment. acad. scientiæ Petropol. t. VI, VII, XII) om *Fagnanis* Integrationer, hvilke jeg ikke kjender*), og *Eulers* egen Fremgangsmaade i disse Afhandlinger bestaaer i en Opstilling af formodede Former for primitive Ligninger, hvoraf han ved Differentiation og Elimination af Konstanten frembringer Differentialligningen; han erklærer selv (Novi comment. t. VII i Specimen novæ methodi curvarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi), at Vanskelighederne ved den direkte Methode bringe ham til at *forsøge* den omvendte, at *antage* visse Relationer imellem de Variable og *prøve* dem. *Lagrange* (Theorie des fonctions analytiques) har vistnok en direkte Methode, der afgiver et smukt Exempel paa en genial Behandling af et vanskeligt Problem, men den er enestaaende og synes heller ikke at kunne blive af almindeligere Betydning, idetmindste ikke efter de Betragtninger, *Boole* har anstillet derover (a Treatise of diff. equations, Cambridge and London 1865). En anden Methode anføres af *Lacroix* (Traité du calc. diff. & int. t. II, p. 473) og denne have *Sturm* og *Despeyrous* (Liouville, Journ. serie II t. II 1856) gjort et første Skridt til at gjøre mere frugtbringende. De vise næmlig først (efter *Lacroix*), at en Differentialligning som

$$\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy = 0$$

kan integreres delvis og giver

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2} = c,$$

idet de sidste Integraler, som tilsammen blive

$$\int \frac{xy}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}}\left(\sqrt{1-y^2}\,dx+\sqrt{1-x^2}\,dy\right),$$

*) Fagnano de Fagnani, Produzioni matematiche, Pesaro 1750, findes, mig bekjendt, ikke her i Staden; den synes at være meget sjelden.

i Henhold til den forelagte Differentialligning blive Nul, og dernæst anvende den samme Fremgangsmaade paa Differentialligningen

$$\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}dx + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}dy = 0,$$

hvorpaa Fundamentalligningen for det elliptiske Integral af første Art (*Legendres* $F(\varphi)$) eller for den elliptiske Funktion (*Jacobis am u*) støtter sig. Men der maa først tilföjes en Faktor til denne Ligning, hvilken angives at være $\frac{1}{1-k^2x^2y^2}$, og derefter lader Integrationen sig virkelig udføre. Hvorledes denne Faktor er tilvejebragt, omtales ikke; men det har ingen Vanskelighed at finde den, naar man vil gaae ud fra det tidligere bekjendte Integral, isolere Konstanten og differentiere, da det vil vise sig, hvilken Faktor det bliver nødvendigt at fjerne for at faae Differentialligningen; denne maa omvendt indføres, naar man vil integrere. Men saalænge man derfor ikke raader over en Methode til Bestemmelse af en saadan Faktor, synes det af *Sturm* og *Despeyrous* paapegede enkeltstaaende Faktum at være af underordnet Betydning.

Det synes derfor at have nogen videnskabelig Interesse for Integralregningens systematiske Udvikling at undersøge, *først* hvilke Differentialligninger der overhovedet lade sig behandle paa den nævnte Maade, og *dernæst* hvorvidt Indførelsen af en Faktor gjør Methoden anvendelig, hvor den ellers ikke kunde bruges. Skjönt det væsentlige Udbytte deraf for Øjeblikket kun er en rationel Udvikling af bekjendte Resultater, fortjener det dog derhos at bemærkes, at der foruden visse almindelige *theoretiske* Sætninger, hvoriblandt udhæves Beviset for de omtalte Faktorers virkelige Tilværelse, tillige gives *praktisk* Anvisning paa, hvorledes Faktorer af bestemt Form undertiden kunne tilvejebringes. Navnlig er her bragt til fuldstændig Afslutning, hvad der angaaer Ligninger, som lade sig integrere uden Faktor, og dem, som før Integrationen kræve en Faktor, der er en Funktion af begge de Variables Produkt. Man tör derhos ikke overse Muligheden af, at der af denne Theori kan rejse sig Midler til Udførelse af Integrationer, hvorom der endnu ikke er blevet Spörgsmaal. — Da min Kollega, Docent Kolling, har beskjæftiget sig med beslægtede Undersøgelser, og jeg oftere saavel forhen, som nu ved denne Lejlighed har konfereret med ham derom, skylder jeg hans Medvirkning, at min Fremstilling har faaet större Afrunding end den vel ellers vilde have haft.

---

1. En Differentialligning af første Orden og første Grad imellem to Variable

$$Mdx + Ndy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

omskrives ved delvis Integration til

$$Mx + Ny - \int(xdM + ydN) = c.$$

Saafremt man her, idet U betyder en Funktion af x og y, har

$$xdM + ydN = U(Mdx + Ndy) = 0, \qquad (2)$$

bliver den primitive Ligning

$$Mx + Ny = c \qquad (3)$$

Betingelsen (2) omskrives efter Indførelse af Udtrykkene for de totale Differentialer dM og dN til

$$\left(x\frac{dM}{dx} + y\frac{dN}{dx} - UM\right)dx + \left(x\frac{dM}{dy} + y\frac{dN}{dy} - UN\right)dy = 0.$$

Denne Ligning maa stemme med (1), saa at de deraf udledte Udtryk for $\frac{dy}{dx}$ blive identiske; følgelig bliver

$$\frac{x\frac{dM}{dx} + y\frac{dN}{dx} - UM}{M} = \frac{x\frac{dM}{dy} + y\frac{dN}{dy} - UN}{N}$$

eller

$$\frac{x\frac{dM}{dx} + y\frac{dN}{dx}}{M} = \frac{x\frac{dM}{dy} + y\frac{dN}{dy}}{N} \qquad (4)$$

den Identitet, som udtrykker *Betingelsen for, at* (3) *er den primitive Ligning, svarende til* (1). Den kan iøvrigt ogsaa modtage Formen

$$\frac{1}{M}\frac{d.(Mx + Ny)}{dx} = \frac{1}{N}\frac{d.(Mx + Ny)}{dy}. \qquad (5)$$

Et simpelt Exempel herpaa har man for

$$M = ax + by, \quad N = ay + bx,$$

idet den primitive Ligning til

$$(ax + by)dx + (ay + bx)dy = 0$$

bliver

$$ax^2 + 2bxy + ay^2 = c.$$

2. Denne Integration af (1) kommer dog især til Anvendelse i saadanne Tilfælde, hvor M afhænger af x alene paa samme Maade som N af y alene, altsaa

$$M = F(y), \quad N = F(x).$$

I saa Tilfælde integreres (1) dels ligefrem ved

$$f(x) + f(y) = f(C), \qquad (6)$$

idet

$$\int_a^x \frac{dx}{F(x)} = f(x),$$

som kan være en ganske ubekjendt transcendent Funktion, og $f(C)$ betegner den indkomne Konstant, dels ogsaa ved den i 1 angivne Methode, idet (4) er opfyldt, saa at

$$xF(y) + yF(x) = c. \qquad (7)$$

Da nu $f(a) = 0$ og $x = a$ indsat i (6) giver $y = C$, faaes af (7)

$$aF(C) + CF(a) = c,$$

hvoraf ved Opløsning med Hensyn til C tænkes frembragt

$$C = \varphi(c).$$

Denne Ligning i Forbindelse med (6) og (7) giver *Additionstheoremet* eller *Fundamentalligningen for Funktionen* $f(x)$ i følgende Form

$$f(x) + f(y) = f(\varphi(xF(y) + yF(x))).$$

Men i dette Tilfælde vil Betingelsen (4) eller (5) væsentlig modificeres, idet

$$\frac{dM}{dx} = 0 = \frac{dN}{dy},$$

saa at man faaer

$$\frac{y}{M}\frac{dN}{dx} = \frac{x}{N}\frac{dM}{dy}$$

eller

$$\frac{d.N^2}{d.x^2} = \frac{d.M^2}{d.y^2}. \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (8)$$

Heraf bestemmes M og N i Almindelighed, idet de to Sider af (8) ikke kunne være identiske, naar virkelig x skal findes alene paa den ene Side, medens y alene forekommer paa den anden; det er altsaa nødvendigt, at de to Sider af (8) udtrykkes ved den samme Konstant B. Men deraf vil da følge

$$M^2 = A_1 + By^2, \quad N^2 = A_2 + Bx^2,$$

idet A_1 og A_2 ere nye Konstanter.

Man vil ogsaa let kunne overbevise sig om, at Differentialligningen

$$\sqrt{A_1 + By^2}\, dx + \sqrt{A_2 + Bx^2}\, dy = 0$$

integreret delvis giver

$$x\sqrt{A_1+By^2} + y\sqrt{A_2+Bx^2} - \int \frac{Bxy}{\sqrt{A_1+By^2}\,\sqrt{A_2+Bx^2}} (\sqrt{A_1+By^2}\, dx + \sqrt{A_2+Bx^2}\, dy) = c$$

eller altsaa

$$x\sqrt{A_1 + By^2} + y\sqrt{A_2 + Bx^2} = c.$$

Heraf læres, dels at den her forudsatte ensartede Sammensætning af M og N som Funktioner henholdsvis af y og af x blot vedkommer Formen i Almindelighed ikke alle de enkelte Konstanter deri (A_1 og A_2 kunne være forskjællige), dels at *naar en Differentialligning af Formen*

$$F(y)dx + F(x)dy = 0$$

skal have en primitiv Ligning af Formen

$$xF(y) + yF(x) = c,$$

saa maa enten umiddelbart haves

$$F(y) = \sqrt{A_1 + By^2}, \quad F(x) = \sqrt{A_2 + Bx^2},$$

eller denne Form kunne faaes ved en Ændring af de Variable.

Herhid høre de specielle Tilfælde, hvor

$A_1 = A_2 = 0, \quad B = 1, \quad ydx + xdy = 0, \quad xy = c,$ og hvor

$A_1 = A_2 = 1; \quad B = -1, \quad \sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0, \quad x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = c,$

hvilke give, den første Fundamentalligningen for $l.x$, den anden den for $arc\ (sin = x)$.

Det er en Selvfølge, at man ved Forandring af x til $\psi(x)$, y til $\psi(y)$ faaer en Differentialligning

$$\sqrt{A_1 + B\psi^2(y)}\ \psi'(x)dx + \sqrt{A_2 + B\psi^2(x)}\ \psi'(y)dy = 0,$$

hvis primitive Ligning bliver

$$\psi(x)\sqrt{A_1 + B\psi^2(y)} + \psi(y)\sqrt{A_2 + B\psi(x)} = c.$$

Herunder indbefattes

$$\sqrt{A_1 + B_1 y + Cy^2}\ dx + \sqrt{A_2 + B_2 x + Cx^2}\ dy = 0,$$

som naar y gjøres til $y - \frac{B_1}{2C}$, x til $x - \frac{B_2}{2C}$, ændres til

$$\sqrt{A_1 - \frac{B_1^2}{4C} + Cy^2}\ dx + \sqrt{A_2 - \frac{B_2^2}{4C} + Cx^2}\ dy = 0.$$

Integration heraf giver først

$$x\sqrt{A_1 - \frac{B_1^2}{4C} + Cy^2} + y\sqrt{A_2 - \frac{B_2^2}{4C} + Cx^2} = c$$

og dernæst, naar igjen indføres $x + \frac{B_2}{2C}$ for x, $y + \frac{B_1}{2C}$ for y, og der multipliceres med $2C$,

$$(B_2 + 2Cx)\sqrt{A_1 + B_1 y + Cy^2} + (B_1 + 2Cy)\sqrt{A_2 + B_2 x + Cx^2} = c.$$

Det er et specielt Tilfælde heraf, svarende til $A_1 = A_2 = A$, $B_1 = B_2 = B$, som *Lacroix* har behandlet (traité du calc. t. II p. 473). Denne lille Udvidelse af den bekjendte Theori skyldes alene den rationelle Fremgangsmaade.

3. Naar den i (4) eller (5) angivne Betingelse ikke er opfyldt, kan det dog tænkes, at Indførelsen af en Faktor φ i (1) gjör denne Ligning modtagelig for Fremgangsmaaden i 1. Men da maa φ bestemmes saaledes, at

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{x\dfrac{d.\varphi M}{dx} + y\dfrac{d.\varphi N}{dx}}{M} = \dfrac{x\dfrac{d.\varphi M}{dy} + y\dfrac{d.\varphi N}{dy}}{N} \\ \text{eller} \\ \dfrac{1}{M}\dfrac{d.\varphi(Mx + Ny)}{dx} = \dfrac{1}{N}\dfrac{d.\varphi(Mx + Ny)}{dy}. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

Den sidste lineære partielle Differentialligning fører til Systemet af sammenhørende Ligninger

$$Mdx = -Ndy = \frac{d.\,\varphi(Mx+Ny)}{0},$$

hvoraf, idet (1) tænkes integreret ved $u = c$, findes

$$\varphi(Mx+Ny) = F(u)$$

med en arbitrær Funktion F. Man finder saaledes

$$\varphi = \frac{F(u)}{Mx+Ny}.$$

Det er derved bevist, at *der altid existerer uendelig mange Faktorer, hvorved* (1) *gjöres modtagelig for den her omhandlede Integrationsmethode.* Men de afhænge af Integrationen af den forelagte Ligning selv, og det hvad enten de findes af den sidste (9) eller af den første udviklet til

$$N(Mx+Ny)\frac{d\varphi}{dx} - M(Mx+Ny)\frac{d\varphi}{dy} = \varphi\left(M\frac{d.(Mx+Ny)}{dy} - N\frac{d.(Mx+Ny)}{dx}\right). \quad (10)$$

Forsaavidt det lykkes at finde to Faktorer, som begge tilstede delvis Integration af (1), er den primitive Ligning fundet uden videre Integration; thi af

$$\varphi_1 = \frac{F_1(u)}{Mx+Ny}, \quad \varphi_2 = \frac{F_2(u)}{Mx+Ny}$$

findes ved Division en Qvotient, der blot behøver at sættes lig en Konstant for at give den søgte primitive Ligning, nemlig

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{F_1(u)}{F_2(u)} = c.$$

Disse Sætningers Overensstemmelse med hvad der forlængst er bekjendt om den Eulerske Integrationsfaktor er iöjnefaldende.

4. Men skjönt det saaledes ikke er muligt at finde en Faktor φ i Almindelighed, kan man dog i specielle Tilfælde finde den ved at efterspore de Betingelser, der maae være opfyldte, for at den skal faae visse simple Former; de Ligninger, der tilfredsstille saadanne Betingelser, lade sig da ogsaa integrere. Navnlig fortjene de Former af (1), der snarest kunne føre til Addition af transcendente Funktioner, altsaa de, hvor M er afhængig af y alene paa samme Maade som N af x alene, at gjöres til Gjenstand for nærmere Undersøgelse. Det ligger i saadanne Tilfælde ogsaa nær at antage φ for en symmetrisk Funktion af x og y. Under den angivne Forudsætning om M og N søges derfor til Exempel Betingelsen for, at φ er en Funktion af xy og altsaa kan skrives $\varphi(xy)$.

Først vil, idet $\frac{dM}{dx} = 0$, $\frac{dN}{dy} = 0$, (10) blive til

$$N(Mx+Ny)\frac{d.\,\varphi(xy)}{dx} - M(Mx+Ny)\frac{d.\,\varphi(xy)}{dy} = \varphi(xy)\left(xM\frac{dM}{dy} - yN\frac{dN}{dx}\right)$$

eller

$$((Ny)^2-(Mx)^2)\varphi'(xy) = \varphi(xy)\left(xM\frac{dM}{dy} - yN\frac{dN}{dx}\right),$$

hvoraf udledes

$$\frac{d.l.\varphi(xy)}{d.xy} = \frac{xM\frac{dM}{dy} - yN\frac{dN}{dx}}{(Ny)^2-(Mx)^2} = \frac{\frac{d.M^2}{d.y^2} - \frac{d.N^2}{d.x^2}}{\left(\frac{N}{x}\right)^2 - \left(\frac{M}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{xy}, \quad \ldots\ldots (11)$$

hvilket sidste Udtryk *maa være en Funktion af xy*.

Denne Betingelse kan yderligere omformes paa følgende Maade. Man finder let

$$\frac{d.M^2}{d.y^2} = \frac{d.y^2\frac{M^2}{y^2}}{d.y^2} = y^2\frac{d.\frac{M^2}{y^2}}{d.y^2} + \frac{M^2}{y^2} = y^2\frac{d.\left(\frac{M^2}{y^2}-\frac{N^2}{x^2}\right)}{d.y^2} + \frac{M^2}{y^2}$$

samt et lignende Udtryk for $\frac{d.N^2}{d.x^2}$; følgelig ved disses Subtraktion,

$$\frac{d.M^2}{d.y^2} - \frac{d.N^2}{d.x^2} = y^2\frac{d.\left(\frac{M^2}{y^2}-\frac{N^2}{x^2}\right)}{a.y^2} + x^2\frac{d.\left(\frac{M^2}{y^2}-\frac{N^2}{x^2}\right)}{d.x^2} + \frac{M^2}{y^2} - \frac{N^2}{x^2}.$$

Indføres dette i (11) tillige med den kortere Betegnelse

$$\frac{N^2}{x^2} - \frac{M^2}{y^2} = v,$$

faaer man

$$-y^2\frac{d.l.v}{d.y^2} - x^2\frac{d.l.v}{d.x^2} = xy\frac{d.l.\varphi(xy)}{d.xy} + 1. \quad \ldots\ldots\ldots (12)$$

Det heraf umiddelbart dannede System af sammenhørende Differentialligninger

$$\frac{d.y^2}{-y^2} = \frac{d.x^2}{-x^2} = \frac{d.l.v}{xy\frac{d.l.\varphi(xy)}{d.xy}+1}$$

giver dels

$$\frac{y^2}{x^2} = c_1 \quad \text{eller blot} \quad \frac{y}{x} = c_1,$$

dels følgende nye Ligning

$$\frac{d.l.v}{xy\frac{d.l.\varphi(xy)}{d.xy}+1} = \frac{x^2d.y^2 + y^2d.x^2}{-2x^2y^2} = -\frac{d.xy}{xy},$$

følgelig

$$\frac{d.l.v}{d.xy} = -\frac{d.\varphi(xy)}{d.xy} - \frac{1}{xy}$$

og deraf igjen

$$l.v = -l.\varphi(xy) - l.xy + c_2$$

eller

$$v = \frac{c_2}{xy\varphi(xy)}.$$

Af disse Resultater findes paa sædvanlig Maade den til (12) svarende primitive Ligning

$$v = \frac{N^2}{x^2} - \frac{M^2}{y^2} = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\varphi(xy)},$$

hvor f er en arbitrær Funktion.

Man har saaledes bevist følgende Sætning:

Naar i Differentialligningen

$$F(y)\,dx + F(x)\,dy = 0$$

Betingelsen

$$\left(\frac{F(x)}{x}\right)^2 - \left(\frac{F(y)}{y}\right)^2 = \frac{f\left(\frac{y}{x}\right)}{xy\varphi(xy)}$$

er opfyldt, saa vil den efter Multiplikation med Faktoren $\varphi(xy)$ kunne integreres delvis til

$$xF(y) + yF(x) = \frac{c}{\varphi(xy)}.$$

5. Foreligger for Exempel den Eulerske Differentialligning

$$\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}\,dx + \sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}\,dy = 0,$$

saa faaes

$$\frac{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}{x^2} - \frac{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}{y^2}$$

$$= \frac{A-Ex^2y^2}{xy}\left(\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right) + B\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) + D(x-y),$$

hvilket ikke reduceres til et Produkt af en Funktion af $\frac{y}{x}$ og en Funktion af xy, med mindre $B = 0$, $D = 0$; men saa faaes

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, \quad \varphi(xy) = \frac{1}{A-Ex^2y^2}.$$

Differentialligningen

$$\sqrt{A+Cy^2+Ey^4}\,dx + \sqrt{A+Cx^2+Ex^4}\,dy = 0$$

vil altsaa efter Tilföjelse af den angivne Faktor $\varphi(xy)$ integreres delvis til

$$x\sqrt{A+Cy^2+Ey^4} + y\sqrt{A+Cx^2+Ex^4} = c(A-Ex^2y^2),$$

hvorunder indbefattes det af *Sturm* og *Despeyrous* behandlede Tilfælde, idet $A = 1$, $C = -(1+k^2)$, $E = k^2$.

6. Ved Hjælp af (12) kan ogsaa opnaaes en almindelig Bestemmelse af, hvilke Ligninger af Formen (1) der lade sig integrere ved Fremgangsmaaden i 1, efterat være multiplicerede med en Faktor af Formen $\varphi(xy)$. Der er næmlig ovenfor (i 4) foretaget en Omskrivning af $\frac{d.M^2}{d.y^2}$, som videre udføres til

$$\frac{d.M^2}{d.y^2} = y^2\frac{d.\frac{M^2}{y^2}}{d.y^2} + \frac{M^2}{y^2} = \tfrac{1}{2}y\frac{d.\frac{M^2}{y^2}}{dy} + \frac{M^2}{y^2}.$$

Dette saavelsom det tilsvarende Udtryk for $\frac{d.N^2}{d.x^2}$ indføres i (11) og giver da

$$\frac{\varphi'(xy)}{\varphi(xy)} = \frac{1}{xy}\left(-1 - \frac{\tfrac{1}{2}x\frac{d.\frac{N^2}{x^2}}{dx} - \tfrac{1}{2}y\frac{d.\frac{M^2}{y^2}}{dy}}{\frac{N^2}{x^2} - \frac{M^2}{y^2}}\right), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

hvilket skal være en Funktion af xy. Men sættes nu

$$\frac{N^2}{x^2} = \psi(x), \quad \frac{M^2}{y^2} = \psi(y),$$

ser man, at det kommer an paa at bestemme en saadan Form for Funktionen $\psi(x)$, at

$$\frac{x\psi'(x) - y\psi'(y)}{\psi(x) - \psi(y)} = \varpi(xy) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

bliver en Funktion af xy, hvilken er betegnet ved ϖ.

Ved Differentiation af (14) med Hensyn til saavel x som y og Elimination af $\varpi'(xy)$ faaes

$$(\psi(x)-\psi(y))\,(x\psi'(x)+x^2\psi''(x)+y\psi'(y)+y^2\psi''(y))-(x\psi'(x))^2+(y\psi'(y))^2 = 0.$$

Denne Ligning differentieres atter med Hensyn til begge de Variable og giver da efter behørig Reduktion

$$\psi'(x)\,[x\psi'(x)+x^2\psi''(x)-y\psi'(y)-y^2\psi''(y)] = (\psi(x)-\psi(y))\,[\psi'(x)+3x\psi''(x)+x^2\psi'''(x)],$$
$$\psi'(y)\,[x\psi'(x)+x^2\psi''(x)-y\psi'(y)-y^2\psi''(y)] = (\psi(x)-\psi(y))\,[\psi'(y)+3y\psi''(y)+y^2\psi'''(y)].$$

Ved Division af disse Ligninger findes

$$\frac{\psi'(x)}{\psi'(y)} = \frac{\psi'(x)+3x\psi''(x)+x^2\psi'''(x)}{\psi'(y)+3y\psi''(y)+y^2\psi'''(y)} = \frac{3x\psi''(x)+x^2\psi'''(x)}{3y\psi''(y)+y^2\psi'''(y)},$$

hvoraf udledes

$$\frac{3x\psi''(x)+x^2\psi'''(x)}{\psi'(x)} = \frac{3y\psi''(y)+y^2\psi'''(y)}{\psi'(y)} = a,$$

idet a er en ubestemt Konstant. Saaledes faaes til Bestemmelse af $\psi(x)$ den lineære Differentialligning

$$x^2\psi'''(x)+3x\psi''(x)-a\psi'(x) = 0,$$

hvis fuldstændige Integral, saalænge $a \gtrless -1$, med b for $\sqrt{1+a}$ er

$$\psi(x) = c_1+c_2x^b+c_3x^{-b},$$

men for $a = -1$ bliver det

$$\psi(x) = c_1 + c_2 l.x + c_3 (l.x)^2.$$

Til disse Værdier af $\psi(x)$ svare henholdsvis

$$\varpi(xy) = b\frac{c_2(xy)^b + c_3}{c_2(xy)^b - c_3} = b\left(1 + \frac{2c_3}{c_2(xy)^b - c_3}\right)$$

og

$$\varpi(xy) = \frac{2c_3}{c_2 + c_3 l.xy},$$

saa at (14) er gjældende. Indføres $\varpi(xy)$ i (13), faaes Faktoren saaledes bestemt

$$\varphi(xy) = \frac{1}{xy} e^{-\frac{1}{2}\int \frac{\varpi(xy)}{xy} d.xy}.$$

M og N bestemmes let, efterat $\psi(x)$ er fundet.

7. Antages nu $a \gtrless -1$, $b \gtrless 0$ og dermed de førstnævnte Værdier for $\psi(x)$ og $\varpi(xy)$, har man dels

$$M = \sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}, \quad N = \sqrt{c_1 x^2 + c_2 x^{2+b} + c_3 x^{2-b}},$$

dels

$$\varphi(xy) = \frac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}b+1}} e^{-b\int \frac{c_3 d.xy}{(c_2(xy)^b - c_3)xy}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (15)$$

Følgelig maa Differentialligningen

$$\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}\, dx + \sqrt{c_1 x^2 + c_2 x^{2+b} + c_2 x^{2-b}}\, dy = 0 \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

kunne integreres delvis, efterat Faktoren (15) er indført, og Resultatet maa blive

$$x\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}} + y\sqrt{c_1 x^2 + c_2 x^{2+b} + c_3 x^{2-b}} = c(xy)^{\frac{1}{2}b+1} e^{b\int \frac{c_3 d.xy}{(c_2(xy)^b - c_3)xy}}. \quad (17)$$

De Led, der efter den delvise Integration af det første Led i (16) fremkomme under Integraltegnet, ville med Udeladelse af den indførte fælles Faktor $\varphi(xy)$ (se (15)), som er en symmetrisk Funktion af x og y, blive dels følgende, der indeholde dy,

$$-x\frac{2c_1 y + (2+b)c_2 y^{1+b} + (2-b)c_3 y^{1-b}}{2\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}} dy + \frac{\frac{1}{2}b+1}{xy}\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}\, x^2 dy$$
$$+ \frac{bc_3 x^2 dy}{(c_2(xy)^b - c_3)xy}\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}$$

dels de, der indeholde dx

$$\left(\tfrac{1}{2}b + 1 + \frac{bc_3}{c_2(xy)^b - c_3}\right)\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}\, dx.$$

Men til disse sidste maa der svare lignende Led i det Integral, der fremkommer ved delvis Integration af det sidste Led i (16); disse reduceres samlede ifølge (16) til Nul. Af de førstnævnte Led, hvori dy forekommer, ville først begge de Led, der ikke indeholde b som Koefficient, blive til

$$\frac{x}{y}\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}\, dy,$$

men med modsatte Tegn, saa at de ligeledes forsvinde. Der staae saaledes tilbage de Differentialer, der indeholde Koefficienten b, hvilke tillige kunne faae den symmetriske Funktion $\frac{1}{xy}$ til fælles Faktor, saa at de i det Hele blive til

$$\frac{b\varphi(xy)}{xy}\left[\frac{-c_2 x^2 y^{2+b} + c_3 x^2 y^{2-b}}{2\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}} + \tfrac{1}{2}x^2\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}} + \frac{c_3 x^2}{c_2(xy)^b - c_3}\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}\right] dy.$$

Her staaer en symmetrisk Funktion af x og y udenfor Parenthesen og sammendrages dernæst de to første Led til

$$\frac{c_1 x^2 y^2 + 2c_3 x^2 y^{2-b}}{2\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}},$$

vil dette igjen med det tredie give

$$\frac{c_1 c_2 (xy)^{b+2} + 2c_2 c_3 (xy)^2 (x^b + y^b) + c_1 c_3 (xy)^2}{2(c_2(xy)^b - c_3)},$$

altsaa en ny symmetrisk Funktion, som Faktor til

$$\frac{dy}{\sqrt{c_1 y^2 + c_2 y^{2+b} + c_3 y^{2-b}}}.$$

Den samme Faktor vil i det andet Integral forekomme ved det tilsvarende Differential i x; disse Led forsvinde altsaa ligeledes, saa at dermed Rigtigheden af (17) er prøvet.

Sætter man i (15), (16) og (17) $b = 2$, vender man tilbage til det i 5 behandlede Tilfælde, hvilket let ses, naar Integrationen i (15) udføres. Man finder næmlig

$$\int \frac{c_3\, dz}{(c_2 z^2 - c_3) z} = -\int \frac{dz}{z} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\sqrt{c_2}\, dz}{\sqrt{c_2}z + \sqrt{c_3}} + \tfrac{1}{2}\int \frac{\sqrt{c_3}\, dz}{\sqrt{c_2}z - \sqrt{c_3}} = \tfrac{1}{2}\, l.\, \frac{c_2 z^2 - c_3}{z^2},$$

følgelig

$$\varphi(xy) = \frac{1}{(xy)^2}\cdot\frac{(xy)^2}{c_2(xy)^2 - c_3},$$

stemmende med det i 5 Udviklede.

8. Af den her udførte Undersøgelse skulde det nu synes, som om en Mængde nye transcendente Funktioners Fundamentalligninger kunde findes, næmlig for alle dem, der kunne henføres til den almindelige Form

$$\int_\alpha^x \frac{dx}{\sqrt{c_1 x^2 + c_2 x^{2+b} + c_3 x^{2-b}}},$$

hvor α er en nærmere bestemt vilkaarlig Grændse, som ikke gjör Integralet uendeligt og b er en aldeles vilkaarlig positiv eller negativ, hel eller brudden, rational eller irrational, reel eller imaginær Konstant. Men en Ændring af dette Integrals variable Störrelse x vil føre det tilbage til det forhen i 5 omhandlede Tilfælde. Integralet omskrives næmlig let til

$$\int_\alpha^x \frac{x^{\frac{b}{2}-1}dx}{\sqrt{c_3 + c_1x^b + c_2x^{2b}}},$$

som igjen, naar man sætter

$$z = x^{\frac{b}{2}} \qquad dz = \frac{b}{2}x^{\frac{b}{2}-1}dx$$

med tilsvarende Grændseforandringer ($x = \alpha$ giver $z = \beta$), bliver til

$$\frac{2}{b}\int_\beta^z \frac{dz}{\sqrt{c_3 + c_1z^2 + c_2z^4}}.$$

Benyttes det andet Udtryk for $\psi(x)$ i 6, blive M og N saaledes bestemte

$$M = \sqrt{c_1y^2 + c_2y^2l.y + c_3y^2(l.y)^2},$$
$$N = \sqrt{c_1x^2 + c_2x^2l.x + c_3x^2(l.x)^2},$$

hvilke give Differentialligningen

$$y\sqrt{c_1 + c_2l.y + c_3(l.y)^2}dx + x\sqrt{c_1 + c_2l.x + c_3(l.x)^2}dy = 0,$$

der imidlertid ogsaa let føres tilbage til en simplere Ligning, som i de andre Tilfælde. Sættes næmlig x for $l.x$ og y for $l.y$, faaes en i 2 behandlet Ligning,

$$\sqrt{c_1 + c_2y + c_3y^2}dx + \sqrt{c_1 + c_2x + c_3x^2}dy = 0.$$

Foretages den samme Ændring i det sidste Udtryk for $\varpi(xy)$ i 6, og beregnes Faktoren derefter, faaer den Formen

$$\varphi = \frac{1}{e^{x+y}(c_2 + c_3(x+y))},$$

som saaledes er ophørt at være Funktion af xy.

Det er saaledes bevist, at

Naar Differentialligningen

$$F(y)dx + F(x)dy = 0$$

efter Indførelse af en Faktor $\varphi(xy)$, *som er en Funktion af* xy, *skal faae en primitiv Ligning frembragt ved delvis Integration af Formen*

$$xF(y) + yF(x) = \frac{c}{\varphi(xy)},$$

saa maa enten umiddelbart haves

$$F(y) = \sqrt{A + By^2 + Cy^4}, \qquad F(x) = \sqrt{A + Bx^2 + Cx^4}$$

eller denne Form kunne faaes ved Forandring af de Variable.

Résumé.

L'intégration des équations différentielles qui conduisent à l'addition des fonctions elliptiques, a dès l'origine été exécutée d'après des méthodes empiriques incertaines. C'est ce que confirment les mémoires d'*Euler* (voyez surtout les Tom. VI, VII, VIII des Novi comment. acad. scient. Petropol.) tant par les calculs eux-mêmes que par des assertions directes. *Lagrange* se sert d'une méthode directe qui n'a pas cependant un caractère de généralité (conf. *Boole* a Treatise of diff. equations, Cambridge and London 1865). Un procédé employé par *Lacroix* (traité du calc.) a amené *Sturm* et *Despeyrous* (Liouville, Journ. 1856) à intégrer au moyen d'un facteur dont ils n'indiquent pas l'origine.

Il est d'abord facile de déterminer quelles sont les équations différentielles de la forme

$$Mdx + Ndy = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

qui se laissent intégrer par partie (Méthode de *Lacroix*). En effet, lorsque

$$xdM + ydN = U(Mdx + Ndy) = 0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

(1) a pour équation primitive

$$Mx + Ny = c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

et (2) peut s'écrire

$$\left(x\frac{dM}{dx} + y\frac{dN}{dx} - UM\right)dx + \left(x\frac{dM}{dy} + y\frac{dN}{dy} - UN\right)dy = 0$$

qui coexiste avec (1); par suite

$$\frac{x\dfrac{dM}{dx} + y\dfrac{dN}{dx}}{M} = \frac{x\dfrac{dM}{dy} + y\dfrac{dN}{dy}}{N} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

est la condition à remplir pour que (3) soit l'intégrale de (1).

Maintenant, si l'on pose $M = F(y)$, $N = F(x)$, l'équation (3) donnera le théorème de l'addition pour

$$f(x) = \int_a^x \frac{dx}{F(x)}.$$

Mais l'équation de condition (4) se réduit en même temps à

$$\frac{d\,.\,N^2}{d\,.\,x^2} = \frac{d\,.\,M^2}{d\,.\,y^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

d'où l'on tire

$$M^2 = A_1 + By^2, \quad N^2 = A_2 + Bx^2.$$

L'équation

$$\sqrt{A_1 + By^2}\,dx + \sqrt{A_2 + Bx^2}\,dy = 0$$

est donc la seule de la forme $F(y)dx + F(x)dy = 0$ *qui par une intégration directe par partie, donne une équation primitive* $xF(y) + yF(x) = c$, *savoir*

$$x\sqrt{A_1 + By^2} + y\sqrt{A_2 + Bx^2} = c.$$

L'équation

$$\sqrt{A_1 + B_1 y + Cy^2}\, dx + \sqrt{A_2 + B_2 x + Cx^2}\, dy = 0,$$

qui est un peu plus générale que celle de Lacroix, rentre dans cette catégorie, car on peut remplacer y par $y - \frac{B_1}{2C}$, et x par $x - \frac{B_2}{2C}$, ce qui donne

$$(B_2 + 2Cx)\sqrt{A_1 + B_1 y + Cy^2} + (B_1 + 2Cy)\sqrt{A_2 + B_2 x + Cx^2} = c.$$

On peut ensuite chercher un facteur φ qui, introduit dans l'équation (1), permette de l'intégrer par partie. Il viendra alors:

$$\frac{1}{M}\frac{d.\,\varphi(Mx + Ny)}{dx} = \frac{1}{N}\frac{d.\,\varphi(Mx + Ny)}{dy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

d'où l'on tire

$$\varphi = \frac{F(u)}{Mx + Ny},$$

$u = c$ étant l'équation primitive de (1). *Il existe donc une infinité de facteurs d'intégration.*

Si φ_1 et φ_2 sont deux de ces facteurs, l'équation cherchée sera

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = c.$$

Cherchons enfin les équations différentielles de la forme (1) qui s'intègrent de la manière indiquée par un facteur fonction de xy. On trouve pour la détermination de ce facteur

$$((Ny)^2 - (Mx)^2)\varphi'(xy) = \varphi(xy)\left(xM\frac{dM}{dy} - yN\frac{dN}{dx}\right).$$

Par suite, il faut que

$$\frac{\dfrac{d.M^2}{d.y^2} - \dfrac{d.N^2}{d.x^2}}{\left(\dfrac{N}{x}\right)^2 - \left(\dfrac{M}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{xy} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

soit une fonction de xy. Si l'on pose ensuite

$$\left(\frac{N}{x}\right)^2 - \left(\frac{M}{y}\right)^2 = v,$$

il vient

$$-y^2\frac{d.l.v}{d.y^2} - x^2\frac{d.l.v}{d.x^2} = xy\frac{d.l.\varphi(xy)}{d.xy} + 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

qui donne de nouveau

$$v = \frac{f\left(\dfrac{y}{x}\right)}{xy\varphi(xy)}.$$

Par conséquent, lorsque l'équation

$$F(y)dx + F(x)dy = 0$$

est telle que

$$\left(\frac{F(x)}{x}\right)^2 - \left(\frac{F(y)}{y}\right)^2 = \frac{f\left(\dfrac{y}{x}\right)}{yx\varphi(xy)},$$

on peut multiplier par $\varphi(xy)$ et intégrer par partie de manière à avoir

$$xF(y) + yF(x) = \frac{c}{\varphi(xy)}.$$

Cette proposition appliquée à l'équation différentielle d'Euler

$$\sqrt{A+By+Cy^2+Dy^3+Ey^4}\,dx+\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}\,dy = 0$$

exige $B = 0$, $D = 0$, et on arrive alors à

$$\varphi(xy) = \frac{1}{A-Ex^2y^2},$$

et par suite au cas traité par *Sturm* et *Despeyrous*.

En dernier lieu, je démontre que si

$$\frac{N^2}{x^2} = \psi(x), \quad \frac{M^2}{y^2} = \psi(y),$$

ψ doit être tel que

$$\frac{x\psi'(x) - y\psi'(y)}{\psi(x)-\psi(y)} = \varpi(xy) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

soit une fonction de xy, afin que l'intégration par le facteur dont il s'agit puisse se faire.

On aura donc, soit:

$$\psi(x) = c_1+c_2 l.x+c_3(l.x)^2$$

$$\varpi(xy) = \frac{2c_3}{c_2+c_3 l.xy},$$

soit:

$$\psi(x) = c_1+c_2x^b+c_3x^{-b}$$

$$\varpi(xy) = b\left(1 + \frac{2c_3}{c_2(xy)^b - c_3}\right).$$

Le premier cas se ramène à celui qui a été traité par Lacroix lorsqu'on met x et y à la place de $l.x$ et de $l.y$, et le facteur d'intégration devient alors

$$\varphi = \frac{1}{e^{x+y}(c_2+c_3(x+y))}$$

qui est une fonction de $x + y$.

Le second cas, lorsqu'on change $x^{\frac{b}{2}}$ en x, et $y^{\frac{b}{2}}$ en y, aboutit encore à l'équation

$$\sqrt{c_3+c_1y^2+c_2y^4}\,dx + \sqrt{c_3+c_1x^2+c_2x^4}\,dy = 0$$

de sorte que *cette équation différentielle est la seule de la forme*

$$F(y)dx + F(x)dy = 0$$

qui puisse être intégrée par un facteur fonction de xy, et qui donne ainsi l'équation primitive

$$xF(y)+yF(x) = \frac{c}{\varphi(xy)}.$$

1868.